

ПРИЛОЖЕНИЕ G

Марковские процессы и их применение в задачах систем телекоммуникаций

Кратко в доступной форме представлены основные понятия в области марковских цепей и марковских непрерывных процессов. Рассмотрен пример моделирования возможной длительности задержки передачи сообщения по линии связи (а также длительности задержки обработки сообщения коммутационным оборудованием) с использованием марковского гауссовского процесса Орнштейна-Уленбека.

XXXVI. *Зависимые события. Вероятностная задача прогнозирования*
При знакомстве с техническими объектами, поведение которых носит стохастический характер, непременно приходится сталкиваться со схемой *независимых* или *зависимых* событий (испытаний), которая служит математической моделью для описания обширного круга разнородных явлений. Смысл термина «независимые испытания» состоит в том, что исход испытания в некоторый дискретный момент времени совершенно не влияет на исход любого другого испытания в любой последующий момент. Общая постановка решаемой в подобных условиях задачи такова: при заданных вероятностях каждого из возможных событий (в испытании, либо являющихся исходом испытания) необходимо определить вероятность того, что за серию испытаний некоторое событие произойдёт определённое число раз.

Для схемы зависимых испытаний характерно, что вероятность осуществления некоторого события в ℓ -м испытании *зависит* в общем случае от исходов $\ell - j$ ($j = 1, 2, \dots, \ell - 1$) предыдущих испытаний. При этом естественно предположить, что предыдущие испытания по-разному влияют на исход проводимого испытания. Можно, например, полагать, что при увеличении j степень этого влияния убывает. В большинстве технических задач можно также допустить, что величина j ограничена некоторым эффективным числом m , так что при всех $j > m$ исходы испытаний уже не влияют на результаты проводимого испытания. Последовательности таких зависимых испытаний названы цепями Маркова (в честь математика А.А. Маркова, который впервые начал изучать схемы зависимых испытаний и получил ряд основополагающих результатов). Выбор числа m является принципиальным при описании таких цепей, что и определяет их классификацию. В наиболее простом, но весьма распространённом случае осуществить адекватный прогноз исхода будущего испытания можно, располагая знанием об исходе последнего («настоящего») испытания и пренебречь информацией об исходах прошлых испытаний. Про такие цепи говорят [77, 79, 114, 116], что они обладают марковским свойством, и называют их *цепями без последействия*. Под марковским свойством понимается следующее положение: исход испытания в момент t_ℓ зависит только от исхода последнего испытания в момент $t_{\ell-1} < t_\ell$ и не зависит от исходов всех прошлых испытаний, произведённых до момента $t_{\ell-1}$. Иначе: для процесса без последействия «будущее» зависит только от «настоящего» и не зависит от «прошлого».

Очевидно, что влияние предыдущих опытов на последующие носит вероятностный характер. В противном случае, если бы это влияние характеризовалось какой-то детерминированной зависимостью, испытания можно было бы и не прово-

дить. В этой связи *основной задачей исследования марковской цепи* является определение безусловных вероятностей $p_k(\ell)$ нахождения системы (пусть система будет обозначена через **NET** для облегчения восприятия приведённого далее примера) в некотором своём состоянии net_k на определённом (ℓ -м) шаге:

$$p_k(\ell) = P\{\text{NET}(\ell) = \text{net}_k\} \quad k = 1, 2, \dots, \hat{N}; \quad \ell = 1, 2, \dots \quad (\text{G.1})$$

В (G.1) k – счётчик состояний, количество которых в рассматриваемой задаче должно быть счётно (конечно либо бесконечно), ℓ – номер шага, этапа, момента времени.

Каждое состояние системы net_k характеризуется совокупностью состояний слагающих её частей (применительно к решаемой задаче). Следовательно, число состояний системы \hat{N} определяется перебором по количеству неупорядоченных сочетаний [104] из K_1 состояний каждой части (сегмента сети, коммутационного узла и т.д. в зависимости от разбиения на части), причём каждое состояние составляющей части может встречаться от 0 до K_2 раз (в любом произвольном сочетании), равных количеству этих функциональных узлов во всей сети – так называемые сочетания с повторениями [104]. Сказанное справедливо для случая, когда составляющие части (далее – сетевые сегменты) обладают *одними и теми же состояниями*. В противном случае необходимы либо частные предположения, либо непосредственный подсчёт состояний системы. Так, например, если телекоммуникационная система состоит из 15-ти характерных составных частей: 8-ми линий связи и 7-ми коммутационных станций (там же в общем случае предполагается наличие каналообразующего оборудования, устройств уплотнения каналов и т.д.), рис. G.1, что соответствует $K_2 = 15$, и если сам по себе каждый компонент может быть хотя бы в одном из двух своих состояний (пусть для примера: «работоспособно» или «неработоспособно», $K_1 = 2$), то общее количество состояний системы равно

$$\hat{N} = \hat{N}_{\text{«раб»}} + \hat{N}_{\text{«нераб»}} = 2 \cdot \frac{(K_1 + K_2 - 1)!}{(K_2 - 1)! \cdot K_1!} = 1680. \quad (\text{G.2})$$

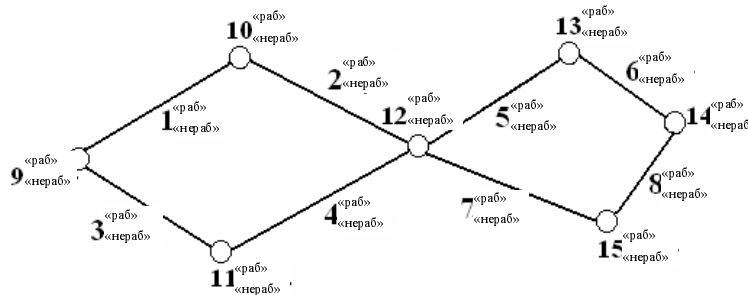


Рис. G.1. Иллюстрация состояний компонентов сети

Иными словами, под каждым состоянием системы понимается конкретная своя совокупность состояний её узлов, характерная именно в этом случае, рис. G.2. Очевидно, что с течением времени система может переходить из одного своего состояния в другое, совершая «блуждание» по состояниям. Так, прийти к какому-либо своему состоянию с номером k на ℓ -м шаге система может с вероятностью $p_k(\ell)$. Определение наибольшей вероятности $p_k(\ell)$ по всей совокупности k от 1 до \hat{N} для каж-

дого ℓ -го шага позволяет выделить состояние k_ℓ^* при $p = \max, \ell$, а значит - найти траекторию системы [113] и осуществить прогноз наиболее вероятного последующего состояния(ий).

На рис. G.2 иллюстративно для облегчения восприятия состояния l -й составляющей изображены геометрическими фигурами, количество и форма которых в общем случае может меняться от одного компонента к другому. Каждое состояние системы net_k характеризуется набором этих фигур (обведено непрерывной линией) по всем столбцам матрицы.

Согласно [113 и др.], решение задачи о нахождении вероятностей $p_k(\ell)$ может быть произведено, если известны *условные вероятности перехода* системы из одного своего состояния в другое p_{kh} , где k и h отвечают за перебор состояний системы по совокупности $[1, \hat{N}]$, а также *начальное состояние* системы $k_{нач}(0)$. Ясно, что $p_{k_{нач}} = p_{k_{нач}}(0) = 1$, а безусловные вероятности пребывания системы в других состояниях, кроме $k_{нач}$ в 0-й момент времени, равны нулю.

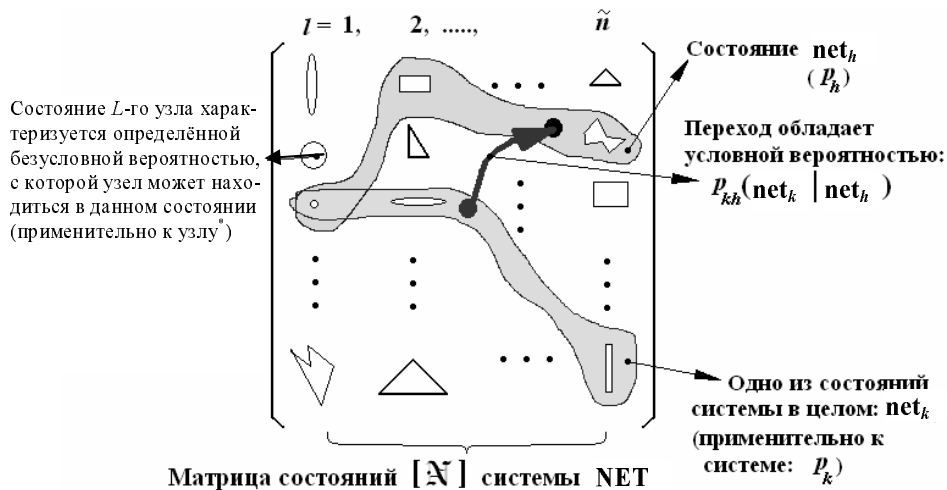


Рис. G.2. Иллюстрация к задаче о марковских цепях

Геометрическими фигурами изображены состояния элементов (узлов) системы, которые в общем случае не идентичны от элемента к элементу и не обязательно количества состояний элементов совпадают. Это означает, что количество геометрических фигур в каждом столбце матрицы в общем случае не одинаковое, и по своей форме геометрические фигуры, расположенные в разных столбцах, не идентичны.

* указанные вероятности в тексте не представлены.

Условные вероятности p_{kh} (или переходные вероятности) обычно располагают в матрицу, именуемую переходной матрицей [113] размерности $\hat{N} \times \hat{N}$, по главной диагонали которой стоят вероятности задержки системы в предыдущем состоянии (перехода системы в то состояние, в котором она уже находится). Если начальное состояние и матрица переходных состояний системы (не путать с матрицами объектов АСГ) заданы, справедлива следующая рекуррентная формула [113]:

$$p_h(\ell) = \sum_{k=1}^{\hat{N}} p_k(\ell-1) \cdot p_{kh}; \quad h = 1, 2, \dots, \hat{N}; \ell = 1, 2, \dots \quad (G.3)$$

С использованием выражения (G.3) можно находить безусловные вероятности пребывания системы в своих состояниях для каждого наперёд выбранного шага. Это выражение именуется уравнением Колмогорова–Чепмена для марковских цепей [116].

Состояния системы с переходными вероятностями удобно схематически представлять в виде направленного графа. Для иллюстрации последнего, а также пояснения задачи о марковских цепях ниже представлен краткий пример.

Пример

Рассматривается следующий процесс: система представляет собой техническое устройство (ТУ), работоспособность которого контролируется в определённые моменты времени (скажем, через сутки), и выявленное состояние регистрируется в отчётной ведомости. Каждый осмотр с регистрацией представляет собой «шаг» процесса. Тогда возможные состояния следующие:

ТУ₁ – устройство полностью исправно;

ТУ₂ – частично неисправно, требует наладки;

ТУ₃ – обнаружена серьёзная неисправность, требуется ремонт;

ТУ₄ – признано непригодным, списано.

Пусть как наладка, так и ремонт продолжаются менее суток, и после их выполнения устройство возвращается в исходное состояние – ТУ₁, или списывается (ТУ₄). Граф состояний такой случайной системы представлен на рис. G.3. Реализация случайного процесса блуждания системы по состояниям может, в частности, иметь такой вид:

$$ТУ_1^{(0)}, \quad ТУ_1^{(1)}, \quad ТУ_2^{(2)}, \quad ТУ_1^{(3)}, \quad ТУ_3^{(4)}, \quad ТУ_1^{(5)}, \quad ТУ_4^{(6)},$$

что означало бы, что в начальный момент устройство исправно; при первом осмотре – также исправно; при втором – частично неисправно, требует наладки; при третьем – исправно; при четвёртом – обнаружена серьёзная неисправность, требует ремонта; при пятом – снова исправно; при шестом – признано непригодным, списано.

Пусть при этом задана матрица переходных вероятностей

$$\|P_{kh}\| = \begin{vmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,6 & 0 & 0 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (G.4)$$

значения элементов которой представлены также и на графе, рис. G.3.

Очевидно, что начальные условия имеют вид

$$p_1(0) = 1, p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0. \quad (G.5)$$

Нули недиагональных элементов во второй и третьей строках матрицы перехода означают, что в состоянии ТУ₂ или ТУ₃ система может попасть только через ТУ₁, т.е. неполадка может иметь место только после того, как устройство было починено.

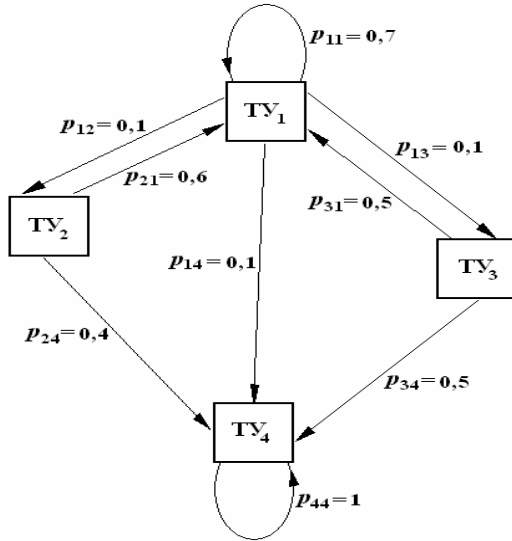


Рис. G.3. Граф состояний системы, характеризующейся процессом изменения работоспособности устройства

В соответствии с выражением (G.3), полагая $\ell = 1$, находим:

$$\begin{aligned}
 p_1(1) &= p_1(0) \cdot p_{11} + \underbrace{p_2(0) \cdot p_{21} + p_3(0) \cdot p_{31} + p_4(0) \cdot p_{41}}_{\Rightarrow 0} = p_1(0) \cdot p_{11} = 0,7, \\
 p_2(1) &= p_1(0) \cdot p_{12} + \underbrace{p_2(0) \cdot p_{22} + p_3(0) \cdot p_{32} + p_4(0) \cdot p_{42}}_{\Rightarrow 0} = p_1(0) \cdot p_{12} = 0,1, \\
 p_3(1) &= p_1(0) \cdot p_{13} + \underbrace{p_2(0) \cdot p_{23} + p_3(0) \cdot p_{33} + p_4(0) \cdot p_{43}}_{\Rightarrow 0} = p_1(0) \cdot p_{13} = 0,1, \\
 p_4(1) &= p_1(0) \cdot p_{14} + \underbrace{p_2(0) \cdot p_{24} + p_3(0) \cdot p_{34} + p_4(0) \cdot p_{44}}_{\Rightarrow 0} = p_1(0) \cdot p_{14} = 0,1.
 \end{aligned}$$

Аналогично выполняется подсчёт безусловных вероятностей и для всех последующих шагов. В итоге получаем следующее:

$$\begin{aligned}
 p_1(2) &= 0,53; p_2(2) = 0,13; p_3(2) = 0,12; p_4(2) = 0,22; \\
 p_1(3) &= 0,421; p_2(3) = 0,131; p_3(3) = 0,113; p_4(3) = 0,335; \\
 p_1(4) &= 0,3435; p_2(4) = 0,1207; p_3(4) = 0,0986; p_4(4) = 0,4372 \text{ и т.д.}
 \end{aligned}$$

Видно, что с увеличением номера шага возрастает вероятность четвертого завершающего состояния. ▲

В общем случае матрица $\|p_{kh}\|$ может также зависеть от номера шага. Тогда для решения задачи о марковской цепи необходимо знать начальное распределение вероятностей $[p_k(0)]$ и k матриц (для каждого шага - своя) переходных вероятностей.

Перейдём к материалу раздела 4.2.2, где представлена задача маршрутизации сообщений, заключающаяся в выборе такого маршрута(ов), использование которого обеспечит минимум средней задержки сообщения в сети. Вообще говоря, является очевидным тот факт, что задержка в передаче сообщения будет наименьшей, если сообщение (пакет) не подвергается ожиданию в очереди на коммутационных узлах и у адресата, т.е. все устройства свободны (с требованием о минимизации задержек, вызванных искажающими факторами). В этом случае задача маршрутизации сведётся к нахождению кратчайшего пути от источника к адресату. Но любая телекоммуника-

ционная система представляет собой систему с ограниченными ресурсами, по этой причине существуют очереди, и Топологически кратчайший путь вовсе не всегда обеспечит минимальное время доставки сообщения (если этот кратчайший путь оказался наиболее загруженным).

Если задать состояния каждого сетевого компонента (по аналогии с рис. G.1), такие как «работоспособно», «занято», «свободно», и т.д. (прим. см. в [123]), то охарактеризовать марковскую цепь можно путём задания графа или матрицы состояний системы $[N]$ по аналогии с рис. G.2 и матрицу(ы) переходных вероятностей $\|p_{kh}\|$. Зная начальное состояние – все устройства в сети работоспособны и не заняты, можно с использованием итераций найти безусловные вероятности p_k пребывания системы в каждом из своих состояний в каждый последующий момент времени с номером ℓ с учётом случайности поступления (возникновения) сообщений, что и заставляет систему менять свои состояния. Далее выбирая на каждом шаге (характеризуемом тактовым интервалом или любым другим конечным интервалом времени) максимальную безусловную вероятность – определять тип (вид) состояния системы k^* ($p_{k^*} = p_{\max}$), тем самым прогнозировать фазовую траекторию системы. Прогнозируя для каждого момента времени состояние системы $\{k^*(t)$ с вероятностью $p_{k^*}\}$, можно однозначно судить о том (с той же самой вероятностью p_{k^*}), какие устройства заняты, свободны или неработоспособны, обеспечивая тем самым маршруты для всех сообщений, позволяющие «обходить» сильно загруженные места.

Заметим, кстати, что представленный подход к решению задачи маршрутизации является весьма несложным в математическом смысле – практически всё сводится к выполнению однотипной алгебраической операции вида (G.3) и операций по определению характеристик массового обслуживания (значений сетевой нагрузки, величины очереди и т.д.), что достаточно легко программируется. Тем не менее при решении практических задач маршрутизации такой подход редко используется – как из-за огромного количества состояний реальной системы, так и наличия принципиальной неопределённости в выработке физической концепции к составлению матриц переходных вероятностей, что с аналитической точки зрения более существенно. Возможно, что в частных случаях найдутся предположения, существенно упрощающие задачу и делающие прозрачной концепцию разработки матриц переходных вероятностей системы. Тогда с учётом очевидной простоты программирования алгебраических выражений представленный подход будет удобен и найдёт техническое приложение.

Во многих случаях (как и показано в разд. 4.2.2) задачу маршрутизации следует решать иным способом, а общую задачу о состоянии сети исследовать с привлечением положений теории непрерывных марковских процессов [112, 114] и, соответственно, при действии предположения о правомерности перехода в решаемой задаче от марковской цепи к марковскому непрерывному процессу, что согласно [113] оправданно во многих технических задачах. Это позволяет воспользоваться экспериментальным материалом и данными, полученными из эксплуатации, и обеспечить корректность вычислительным экспериментам. Подобный пример будет представлен ниже (в следующем подразделе Приложения), а здесь для завершения стройности восприятия кратко остановимся на других типах марковских цепей и процессов.

В общем случае марковские процессы классифицируются в зависимости от наличия дискретизации по времени, либо состояниям, либо и времени, и состояниям

[113]. Тогда классификация может быть представлена следующим образом:

а. марковские процессы с дискретным временем и дискретными состояниями – марковские цепи;

б. марковские процессы с непрерывным временем и дискретными состояниями – разрывные марковские процессы. Здесь предполагается, что система обладает счётным множеством состояний, но переход возможен в любой момент времени, причём время континуально. Обычно в таких задачах закон распределения моментов времени, когда система может перейти из одного состояния в другое, задаётся случайным потоком [68] и момент перехода отождествляется с осуществлением события из этого случайного потока. Так, переход системы из одного состояния в другое состоит в осуществлении двух зависимых событий: сначала должно произойти событие из управляющего потока, а затем собственно переход. Предполагается также, что собственно переход системы из состояния в состояние происходит мгновенно, поэтому осуществление события из управляющего потока влечёт за собой *скачок* в процессе. Это обстоятельство даёт повод называть разрывные марковские процессы *скачкообразными* [113]. Если множество состояний конечно ($\hat{N} = \text{const}$) или бесконечно, но счётно, то соответствующий процесс называется разрывным процессом со счётным числом состояний. Аналогия таких процессов с цепями Маркова весьма значительна, а разница, как указывалось выше, состоит в характере изменения времени, поэтому разрывные марковские процессы со счётным (в частности – конечным) числом состояний называют марковскими цепями с непрерывным временем [116].

с. Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний [116]. Состояния разрывного марковского процесса могут образовывать также и непрерывное (континуальное) множество. При этом получается разрывный процесс с непрерывным тем не менее множеством состояний. На рис. G.4 изображены возможные реализации разрывных процессов со счётным a и континуальным b множеством состояний.

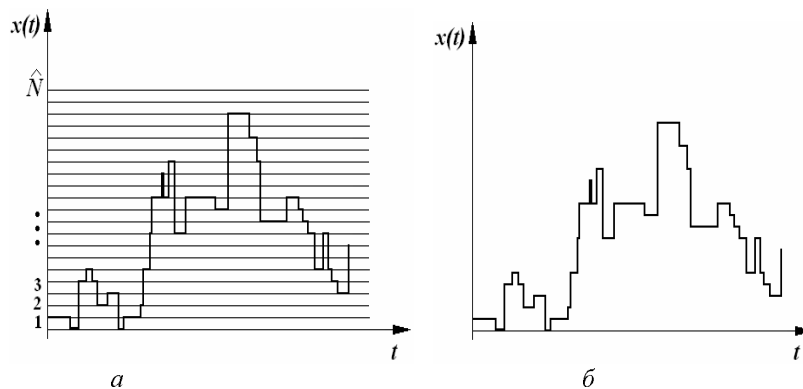


Рис. G.4. Иллюстрация разрывного марковского процесса: a – количество состояний счётно, b – не счётно*.

* Скачкообразные процессы с непрерывным множеством состояний подчиняются интегро-дифференциальному уравнению Колмогорова–Чепмена [116].

Уравнения Колмогорова–Чепмена, также являющиеся основополагающими в этом классе задач, из алгебраических переходят в линейные дифференциальные первого порядка, имеющие постоянные либо переменные коэффициенты [113]. Переходная матрица теперь содержит эти коэффициенты, именуемые *интенсивностями потоков*. Так, для рассматриваемой физической системы (объекта) записывается система уравнений первого порядка (количество уравнений совпадает с количеством состояний), в результате решения которой определяются временные зависимости безусловных вероятностей состояний: $p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t), \dots, p_{\hat{N}}(t)$.

Последним видом приводимой классификации марковских процессов являются:

d. непрерывнозначные или непрерывные марковские процессы. Рассмотрению этого вида процессов и примера, связанного с определением факторов помех, увеличивающих длительность передачи сообщения в сети, уделено внимание в следующем подразделе, а здесь лишь для сопоставления с разрывными процессами отметим следующее. Последние характеризуются тем, что за время Δt вероятность скачка значительно меньше вероятности его отсутствия; если же скачок происходил, то состояние системы изменялось и, как правило, на значительную величину [116]. Особенностью *непрерывных марковских процессов* является *малое* перемещение системы за один шаг.

XXXVII. Марковские процессы с непрерывным временем и непрерывным множеством состояний

Рассмотрим основные характеристики непрерывных марковских процессов, основываясь на общих представлениях о непрерывных случайных процессах.

Непрерывный процесс наиболее полно описывается многомерной (n -мерной) плотностью вероятности $\varphi_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$, которая определяет вероятность того, что значения случайной функции $x(t)$ в моменты времени t_1, t_2, \dots, t_n заключены соответственно в интервалах $(x_1, x_1 + \Delta x_1), (x_2, x_2 + \Delta x_2), \dots, (x_n, x_n + \Delta x_n)$. При малых Δx_j эта вероятность равна $\varphi_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \cdot dx_1 \dots dx_n$. Многомерная плотность вероятности φ_n даёт возможность судить о связи между значениями случайной функции в n моментов времени и характеризует случайный процесс тем детальнее, чем больше число n .

По правилу умножения вероятностей зависимых событий:

$$\begin{aligned} & \varphi_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ & = \varphi_{n-1}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \times \\ & \quad \times v_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot dx_n. \end{aligned} \quad (G.6)$$

Величина $v_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot dx_n$ есть условная вероятность того, что значение случайного процесса в момент t_n окажется в интервале $(x_n, x_n + \Delta x_n)$ *при условии*, что в предыдущие моменты времени t_1, t_2, \dots, t_{n-1} процесс принимал значения x_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, n-1$).

Иными словами, условная вероятность $v_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot dx_n$ зависит от всей предыстории процесса, начиная с начального момента t_1 и кончая моментом t_{n-1} . В связи с этим в литературе, посвящённой описанию случайных процессов [82, 112-114, 116 и др.], момент t_n называется «будущим», момент t_{n-1} – «настоящим», а все остальные моменты от t_1 до t_{n-2} – «прошлым». И в таком контексте

величина $v_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot dx_n$ может рассматриваться как *вероятность перехода*.

Согласно [126], процесс $x(t)$ будет марковским лишь в том случае, когда

$$v_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = v(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (G.7)$$

Соотношение (G.7) определяет *марковское свойство* непрерывных процессов.

Кроме того, в [115, 116] отмечается, что при выборе моментов времени в (G.7) не было сделано никаких оговорок относительно промежутков между ними, откуда следует, что их можно выбирать различными. В частности, промежуток времени между «будущим» (t_n) и «настоящим» (t_{n-1}) на этом основании может иметь *произвольную протяжённость*. Однако интуитивно понятно, что чем дальше от «настоящего» отстоит интересующий нас момент из «будущего», тем неопределённее прогноз, который даёт функция $v(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$. Это означает, что дисперсия плотности вероятности перехода с ростом разности $t_n - t_{n-1}$ должна как-то увеличиваться, или, что то же самое – характер функции $v(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$ должен зависеть от времени. Тем не менее в [115] показано, что тенденция к «расплыванию» у функции v сохраняется не для любых значений разности $t_n - t_{n-1}$, а стремится в большинстве случаев с ростом последней к своему стационарному значению. В [115] также показано, что у немарковских процессов плотность v является *функционалом от реализации* $x(t)$. Это означает, что для таких случаев на характер плотности вероятности перехода влияет форма реализации $x(t)$ ($t < t_{n-1}$).

В силу условия нормировки, распространяющегося на функцию v , для каждого момента времени имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \cdot dx_n = 1. \quad (G.8)$$

Отметим, что соотношение (G.6) справедливо и без дифференциальных множителей:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= \varphi_{n-1}(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \times \\ &\times v(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (G.9)$$

Применяя соотношение (G.9) последовательно к распределению $\varphi_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n)$, в [116] получено:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) &= \varphi_1(x_1, t_1) \times v(x_2, t_2 | x_1, t_1) \times \\ &\times v(x_3, t_3 | x_2, t_2) \times \dots \times v(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}). \end{aligned} \quad (G.10)$$

Это означает, что марковский процесс полностью определяется одномерной плотностью распределения $\varphi_1(x_1, t_1)$ и плотностями вероятности перехода: $v(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1})$, $j = 1 \dots n$. Это также означает, что для немарковских процессов представление многомерной плотности вероятности в виде (G.10) невозможно.

В случае, когда плотность вероятности перехода зависит от разности $t_j - t_{j-1}$ и не зависит от самих значений t_j и t_{j-1} , т.е.:

$$v(x_j, t_j | x_{j-1}, t_{j-1}) = v(x_j, t_j - t_{j-1} | x_{j-1}), \quad (G.11)$$

непрерывный марковский процесс, согласно [115], называется однородным. Причём однородность не означает его стационарности. Действительно, двумерная плотность

однородного процесса определяется равенством

$$\varphi_2(x_{j-1}, t_{j-1}; x_j, t_j) = \varphi_1(x_{j-1}, t_{j-1}) \times v(x_j, t_j - t_{j-1} | x_{j-1}), \quad (\text{G.12})$$

куда входит зависящая от времени одномерная плотность $\varphi_1(x_{j-1}, t_{j-1})$. Согласно [115], марковский процесс становится стационарным лишь тогда, когда $\varphi_1(x_{j-1}, t_{j-1}) = \varphi_1(x_{j-1})$.

Непрерывные марковские процессы, равно как и марковские цепи и марковские разрывные процессы, подчиняются фундаментальному соотношению Колмогорова-Чепмена. Для непрерывных процессов оно впервые было получено М. Смолуховским, поэтому интегральный вид перечисленного соотношения называют уравнением Смолуховского [116]:

$$v(x, t | x_0, t_0) \cdot dx = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, t | y, \tau) \cdot v(y, \tau | x_0, t_0) \cdot dy. \quad (\text{G.13})$$

Видно, что уравнение Смолуховского накладывает существенные ограничения на вид плотностей вероятности перехода v : интегрирование по dy произведения двух функций v должно, во-первых, исключать зависимость результата интегрирования от промежуточного момента τ и, во-вторых, привести к той же самой функции v .

Классически уравнения Колмогорова-Чепмена записываются в дифференциальном виде, вывод которых представлен в [115, 116]. Здесь же для краткости мы ограничимся тем, что приведём их. Так, первое уравнение Колмогорова имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{\partial v(x, t | x_0, t_0)}{\partial t_0} &= K_1(x_0, t_0) \cdot \frac{\partial v(x, t | x_0, t_0)}{\partial x_0} + \\ &+ \frac{K_2(x_0, t_0)}{2} \cdot \frac{\partial^2 v(x, t | x_0, t_0)}{\partial x_0^2}. \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

В (G.14) коэффициенты K_1 и K_2 , согласно [115], представляют следующий физический смысл: $K_1(t_0, x_0)$ есть средняя скорость изменения ординаты процесса в момент t_0 в точке x_0 ; и $K_2(t_0, x_0)$ – дисперсия ординаты за время Δt_0 относительно той же фиксированной точки x_0 . Отсюда очевидными являются их названия: K_1 – коэффициент сноса и K_2 – коэффициент диффузии процесса.

Несмотря на то, что соотношение (G.14) выведено в свете вполне прозрачного физического смысла, в технических расчётах оно применяется достаточно редко [116], так как дифференцирование ведётся по «прошлому» времени t_0 . Отсюда и название этого уравнения: *обратное уравнение Колмогорова*, или *обращённое в прошлое*.

Второе уравнение Колмогорова (*прямое* или *обращённое в будущее*) выведено более искусственным образом [116], но, тем не менее, получило широкую распространённость при решении задач. Уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x} [K_1(x, t) \cdot v(x, t | x_0, t_0)] + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} [K_2(x, t) \cdot v(x, t | x_0, t_0)]. \end{aligned} \quad (\text{G.15})$$

Согласно [116], уравнение (G.15) до вывода его А.Н. Колмогоровым встречалось в работах ряда физиков, поэтому в литературе можно встретить для него разные названия: уравнение Фоккера–Планка, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, уравнение Эйнштейна–Фоккера–Колмогорова.

Уравнения (G.14), (G.15) являются дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа и носят название *диффузионных* [115]. По этой причине непрерывные марковские процессы часто называют *диффузионными*. Очевидно, что для отыскания решений приведённых уравнений необходимо задать начальные, граничные условия и функциональные зависимости K_1 и K_2 . Ниже как раз представлен пример конкретного решения (решения уравнения Орнштейна–Уленбека [114] при заданных начальных и граничных условиях) применительно к задаче определения факторов помех, увеличивающих длительность задержки при передаче сообщения в сети (см. разд. 4.2.2, 4.4).

Выше говорилось, что сложность в применении модели марковских цепей к решению задачи разд. 4.2.2 – по определению оптимальных маршрутов для передачи сообщений – заключается в отсутствии прозрачной физической концепции к составлению матриц вероятностей перехода. В этой связи для обеспечения состоятельности вычислительных экспериментов, необходимых для анализа и настройки ВОСП, в ряде случаев может быть оправданно следующее предположение: *без учёта эффектов, связанных со снижением внутрисетевой работоспособности (конечной точности синхронизации, коэффициентов готовности оборудования и прочее) дополнительное увеличение длительности задержки при передаче сообщений происходит по причине влияния большого количества внешних возмущающих факторов*. А именно, имеет место влияние физических эффектов в оптоволоконных линиях: нелинейных оптических эффектов, дисперсии; внешних факторов помех: электромагнитных и электростатических помех, акустического шума, вибрации, фоновых излучений, флуктуаций температуры и влажности, что связано с наличием работающих промышленных агрегатов, характерных для отдельных сетевых узлов. Всё это приводит к искажениям сигналов в линиях и к снижению работоспособности оборудования в узлах связи [126], а следовательно, – к отличию реальной сети от идеальной.

Очевидно, что влияние каждого из факторов является случайным. Если ещё при этом влияние каждого такого фактора оказывает *малое воздействие* на сетевые элементы, а в совокупности этих факторов много и налицо видимое ухудшение работоспособности (функционирования) сети, то можно предположить гауссов характер в изменении состояния его узлов [106]. Под «видимым ухудшением работоспособности системы передачи» в [126] предложено понимать следующее: повышение уровня коэффициента ошибок, появление сигналов NES, NMES, «аварийное состояние», невозможность соединения с определёнными абонентами или выполнения ряда опций, автоматическое несанкционированное переключение статуса синхронизации, а также зависание с существенным замедлением скорости доведения информации до абонента (в том числе из-за коммутационных блокировок) либо переключение на внутростанционные или внешнестанционные резервные каналы.

В [126] было показано, что изучение НТД, различной технической литературы, пособий по настройке и эксплуатации, замена сетевых компонентов не всегда приводит к однозначному положительному результату. Так, например в [47], определено указывается, что ISDN-сети с учётом имеющего место сегодня уровня подготовки сопровождающей документации, включая методики настройки и поддержания работоспособности, требуют *постоянной!* их подстройки в процессе эксплуатации,

применя измерительную базу. В противном случае перечисленные выше признаки снижения работоспособности сети будут являться следствием *нормальной* её эксплуатации! В связи с этим, как было представлено в [126], существуют ситуации, когда сетевой оператор принимает оправданное решение о самостоятельном проведении подстройки сети на основе учёта влияния воздействующих факторов. В этих случаях корректность моделирования, а значит – и достоверность результатов, в большой степени зависят от адекватности построения приближающих концепций (например, от способа построения матрицы переходных вероятностей или от замены реальных случайных процессов некоторыми модельными). Ниже представлена методика проведения допустимой замены нестационарных случайных факторов помех нестационарным случайным марковским гауссовским процессом.

Для исследования степени близости наблюдаемого случайного процесса (состоящего, например, в изменении состояния сетевого устройства либо процесса изменения реального значения длительности задержки передачи сообщения в сети) с марковским процессом предлагается производить замеры уровня внешних влияющих факторов (амплитуд электрических напряжённости поля электромагнитных помех, акустического шума, вибрации, значений температуры и влажности, оптических факторов искажений), которые можно наблюдать через определённые интервалы времени $\hat{\tau}_n^{(\ell)}$, где индекс «п» означает вид изучаемой помехи, а ℓ – счётчик интервалов времени. Далее следует изучить «поведение» полученных путём измерений случайных процессов, характеризующих внешние воздействия.

В результате последующего анализа в ряде случаев может быть выявлено, что все эти процессы имеют гауссовскую плотность распределения вероятности и являются нестационарными с различным характерным временем на протяжении рабочего дня. Действительно, как правило, эти эффекты не могут иметь стационарный характер в силу их внезапного возникновения (исчезновения), во многих случаях зависящего от сигнала (имеющего мультипликативный вид).

Изучение характера «зависимости» значений помехи может быть выполнено посредством анализа их автокорреляционных функций. Так, если значение помехи, полученное в интервале $\hat{\tau}_n^{(\ell)}$, существенно зависит от значения в предыдущем интервале $\hat{\tau}_n^{(\ell-1)}$ (по величине коэффициента нормированной автокорреляционной функции [106]), и имеет слабую зависимость от значений, полученных в $\hat{\tau}_n^{(\ell-2)}$ или ранее, то налицо выполнение марковского свойства у перечисленного процесса. Гауссов характер несложно подтвердить путём анализа реализаций процесса (методом фиксации значений помехи). Следует заметить, что нормальный закон распределения является свойственным большинству техническим объектам (а следовательно, и создаваемым ими помехам), кроме того, к нему приближается случайный процесс, если последний является результатом сложения многих независимых случайных процессов, что также характерно для технических объектов. В таких ситуациях для ряда задач может быть оправданным предположение о том, что совокупное случайное воздействие возмущающих факторов, ухудшающих работоспособность системы передачи, представляет собой марковский гауссовский нестационарный процесс, а именно – процесс Орнштейна–Уленбека. Этот процесс, согласно [114], является единственным нестационарным гауссовским процессом, для которого выполняется условие отсутствия последствия или марковское свойство.

Предложенный подход к моделированию случайного процесса изменения

состояния телекоммуникационной системы справедлив при действии допущения об отсутствии каких-либо инерционных либо гистерезисных свойств по отношению к действию возмущений.

Так, в представленных ниже рассуждениях предполагается, что если процесс воздействия на передаваемый сигнал является марковским, то и процесс возможного изменения длительности передачи этого сигнала – тоже марковский. С приведённой оговоркой можно по аналогии с [114] определить вероятность P события, при котором на произвольной линии связи (либо в произвольном аппаратном устройстве) значение переменной $\langle H_{kl} \rangle$ (или $\langle \delta t_k \rangle$, см. разд. 4.2.2) в момент времени t (в течение интервала Δt с номером ℓ) лежит между своим начальным значением и некоторым достижимым значением к моменту прекращения действия помехи.

Для сокращения текста дальнейшие рассуждения проведены относительно обобщённого сетевого элемента, для которого фактор помехи обозначен через \mathfrak{A} (индексы k и l опущены ввиду идентичности по этим параметрам представленных далее выкладок). Проведённые рассуждения для \mathfrak{A} аналогично без сужения общности распространяются на все устройства, подверженные влиянию помех в сети. С учётом проведённой замены *дискретно меняющихся функциональных характеристик* (прежде всего в силу дискретности моментов времени Δt , например, тактовых интервалов) на *непрерывно меняющийся параметр* \mathfrak{A} в рассматриваемой задаче, сказанное можно представить следующим образом: если к началу действия помехи $\mathfrak{A}|_{t=0} = \mathfrak{A}^{\text{нач}}$ (начало действия помехи) и $\mathfrak{A}|_{t=\hat{N}} = \mathfrak{A}^{\text{кон}}$ - когда действие помехи прекращается, то плотность вероятности процесса Орнштейна–Уленбека (не путать с плотностью переходной вероятности), согласно [114], записывается в виде

$$\varphi(\mathfrak{A}^{\text{кон}}, t, \mathfrak{A}) = \frac{\partial}{\partial \mathfrak{A}} P\{\mathfrak{A}^{\text{нач}} \leq \mathfrak{A} \leq \mathfrak{A}^{\text{кон}}, \text{ если } \mathfrak{A}(t=0) = \mathfrak{A}^{\text{нач}}\}. \quad (\text{G.16})$$

Проведение рассуждений относительно плотности вероятности процесса φ взамен плотности переходной вероятности ν (которая входит в уравнения Колмогорова) в рассматриваемом случае допустимо благодаря обоснованному в [116] положению о том, что как уравнение Орнштейна–Уленбека, так и его фундаментальное решение являются *идентичными* в отношении как к ν , так и к φ .

Согласно положениям раздела 4.2.2, для идеальной системы передачи (если мы обозначили через \mathfrak{A} параметр $\langle H_{kl} \rangle$ или $\langle \delta t_k \rangle$), значение $\mathfrak{A}^{\text{нач}} = 0$. Значение $\mathfrak{A}^{\text{кон}}$ может попадать как в допустимый диапазон (при котором ещё обеспечивается работоспособность сети и качество передачи на требуемом уровне), так и оказываться ниже допустимого порога: $\mathfrak{A}^{\text{кон}} \leq \hat{\mathfrak{A}}^{\text{кон}}$, $\hat{\mathfrak{A}}^{\text{кон}}$ - критическая величина. В таком случае можно говорить о выходе сегмента телекоммуникационной системы из строя под действием помехи, а следовательно, о том, что его эксплуатация с запредельными значениями $\mathfrak{A}^{\text{кон}}$ должна быть прекращена.

Согласно [116], для плотности вероятности процесса Орнштейна–Уленбека справедливо следующее уравнение:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -K_1 \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \mathfrak{A}} + K_2 \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathfrak{A}^2}. \quad (\text{G.17})$$

Здесь коэффициенты K_1 и K_2 определяются аналогично представленному выше – как коэффициент сноса и дисперсии процесса изменения параметра \mathfrak{A} в начальный момент при $t = 0$.

По аналогии с [114, 116] возможно получение решения уравнения вида (G.17), удовлетворяющего следующим начальным и граничным условиям для функциональных компонентов исследуемого сетевого сегмента:

$$\varphi(\mathfrak{A}, 0) = \Psi(\mathfrak{A}) \quad \text{и} \quad \varphi(-\infty, t) = \varphi(+\infty, t) = 0. \quad (\text{G.18})$$

Функция $\Psi(\mathfrak{A})$ в общем случае меняется от одного сетевого сегмента к другому и не является постоянной величиной: $\Psi(\mathfrak{A}) \neq \text{const}(\mathfrak{A})$. Но в соответствии с физическим смыслом задачи и согласно данному выше определению при $t \rightarrow 0$ переменная $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^{\text{нач}}$, т.е. стремится к вполне определённой *детерминированной* величине. Отсюда следует, что при решении технической задачи можно положить: $\varphi(\mathfrak{A}, 0) = \delta(\mathfrak{A})$, где $\delta(\mathfrak{A})$ – дельта-функция [104] (интеграл от дельта-функции равен единице). Для такой задачи существует аналитическое решение уравнения (G.17) - представлено в [116]:

$$\varphi(\mathfrak{A}^{\text{нач}}, t, \mathfrak{A}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi K_2 \cdot (t - t_0)}} \cdot \exp\left\{-\frac{[\mathfrak{A} - \mathfrak{A}^{\text{нач}} - K_1 \cdot (t - t_0)]^2}{2K_2 \cdot (t - t_0)}\right\}. \quad (\text{G.19})$$

Для того чтобы выражение (G.19) приобрело технически понятный смысл для каждого исследуемого устройства, необходимо коэффициентам K_1 и K_2 (на которые распространяется номер коммутируемого канала и номер аппаратной составляющей) придать числовые значения на основе определённых выводов и расчётов. В силу общности рассматриваемой задачи здесь подобные рассуждения не приводятся.

Далее, получив функцию плотности процесса Орнштейна–Уленбека, в соответствии со статистической методикой моделирования случайных процессов (см. разд. 4.1, 4.2.1) для каждого фактора помехи и функциональной составляющей сети (конкретной линии связи и аппаратного узла) возможно формирование псевдослучайной(ых) последовательности(ей), характеризующих их работоспособность, а значит – и факторы задержки сообщений в сети с наибольшей вероятностью (по диапазон значений \mathfrak{A}):

$$z^{\text{NET}} = F_{\text{NET}}^{-1} \left[\int_0^t \max_{\mathfrak{A}} \left[\int_{\mathfrak{A}=\mathfrak{A}^{\text{нач}}}^{\mathfrak{A}} \varphi(\mathfrak{A}^{\text{нач}}, t, \mathfrak{A}) \cdot d\mathfrak{A} \right] \cdot dt \right]_{t=z(\tilde{i})}. \quad (\text{G.20})$$

В (G.20) \tilde{i} - номер равномерно распределённой псевдослучайной числовой последо-

[†] Индекс «NET» свидетельствует о применимости получаемой числовой последовательности к описанию состояния компонентов сети.

вательности. После определения наиболее вероятных чисел z^{NET} значения факторов помех могут быть найдены следующим образом:

$$\mathcal{A}(t) = (1 - \mathcal{A}^{\text{нач}}) \times z_{\ell}^{\text{NET}}. \quad (\text{G.21})$$

Далее наиболее вероятная величина $\mathcal{A}(t)$, являющаяся фазовой траекторией элемента(ов) телекоммуникационной системы, может быть подвергнута дополнительному квантованию по времени для повышения точности расчётов. Таким образом, подобный подход позволяет в свете прозрачной физической концепции произвести моделирование реальной работоспособности телекоммуникационной системы с учётом факторов возмущений.